



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE
2024-I**

Aritmética **PROBABILIDADES**



APLICACIONES EN LA VIDA DIARIA

La probabilidad es una rama de las matemáticas tan cercanas a nosotros que muchas veces, sin darnos cuenta, las utilizamos en nuestro lenguaje cotidiano. Algunas aplicaciones en la vida diaria lo vemos en:

Decisiones médicas

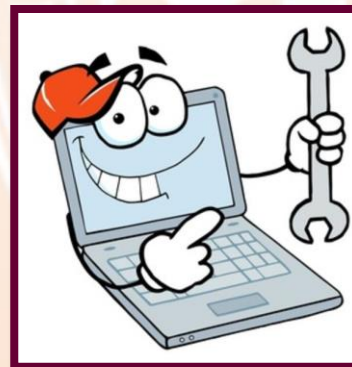
Esperanza de vida

Prima de seguros

Meteorología



Fiabilidad de los productos



Juegos de Azar



PROBABILIDAD

Experimento aleatorio (ϵ)

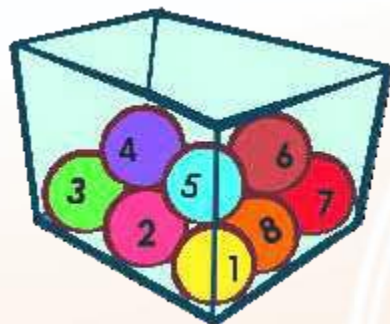
Es un experimento que consiste en la realización de una o más pruebas, cuyo resultado (en cada uno) depende del azar, por tanto, no se puede anticipar el resultado.

Ejemplos:

Lanzamiento de unos dados.



Apostar por un número en la ruleta.



Extracción de una bolilla numerada de una urna.

Lanzar dos monedas y observar el lado superior.



En un experimento físico el resultado es el esperado debido a que está bajo las leyes naturales y que debe cumplirse en el experimento.



Espacio Muestral (Ω)

Conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplo:

Experimento aleatorio :

Se lanza una moneda tres veces

Diagrama del árbol

1° lanzamiento:

C S

2° lanzamiento:

C S C S C S C S

3° lanzamiento:

C S C S C S C S

donde C es cara y S es sello

Espacio muestral:

$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$

Evento o Suceso (A)

Subconjunto del espacio muestral, es decir conformado por uno o más resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplos:

Del ejemplo anterior, se tiene algunos eventos

A: Se obtiene una cara y dos sellos.

$A = \{CSS, SCS, SSC\}$

B: Se obtiene al menos dos caras

$B = \{CCC, CCS, CSC, SCC\}$

M: Se obtiene 3 caras o 3 sellos.

$M = \{CCC, SSS\}$

Veamos el espacio muestral al lanzar dos dados y algunos de los eventos:

Evento (A): Al lanzar los dados el segundo resultado es 1.

$$A = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$$

Evento (B): Al lanzar un par de dados se obtiene 8 como la suma de los resultados observados en las caras superiores de los dados.

$$B = \{(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)\}$$

Evento (C): Al lanzar los dados se obtiene como suma de resultados un número mayor que 9.

$$C = \{(6,4), (5,5), (4,6), (6,5), (5,6), (6,6)\}$$

	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)



CLASIFICACIÓN DE LOS ESPACIOS MUESTRALES (Ω)

Ω	CARACTERÍSTICA	EJEMPLOS
DISCRETO FINITO	NÚMERO FINITO DE ELEMENTOS	ε_1 : Lanzar un dado. $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
		ε_2 : Lanzar tres veces una moneda. $\Omega_2 = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$.
DISCRETO INFINITO	NÚMERO INFINITO NUMERABLE	ε_3 : Lanzar una moneda hasta que salga sello. $\Omega_3 = \{S, CS, CCS, CCCS, \dots\}$.
		ε_4 : Contar los productos defectuosos. $\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
CONTINUO (El espacio muestral es un intervalo)	INFINITO NO NUMERABLE	ε_5 : Vida útil, en horas, de un artefacto eléctrico. $\Omega_5 = \{t \in \mathbb{R} \text{ tal que } t \geq 0\} = [0, +\infty >$.
		ε_6 : Lanzar un dardo y determinar la distancia desde la posición de caída hasta el centro de un blanco de tiro de 5 cm de radio. $\Omega_6 = \{\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 25\} = [0, 5 >$.

Aplicación 1

Los equipos de fútbol de las planas de Aritmética (A) y Álgebra (X) juegan un minitorneo que consiste en varios partidos, el equipo ganador participará en un campeonato organizado por la UNI. La regla del minitorneo considera que no hay empates y clasifica el primer equipo que gana 2 partidos seguidos o se realice un total de tres partidos. Indique el espacio muestral asociado a este experimento.

Resolución

Experimento aleatorio :

Dos equipos juegan varios partidos y clasifica el primer equipo que gana dos partidos seguidos o se realice un total de tres partidos.

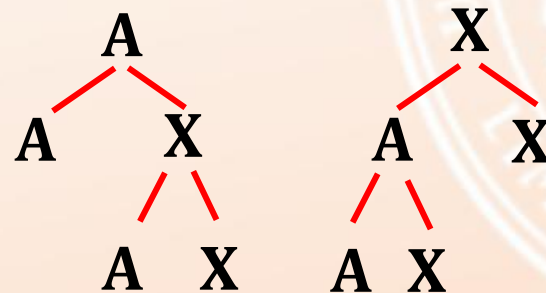
Diagrama del árbol

1° partido:

2° partido:

3° partido:

Gane o Gane



Espacio muestral:

$$\Omega = \{AA, AXA, AXX, XAA, XAX, XX\}$$

Álgebra de eventos

1. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos del espacio muestral Ω , se cumple que:

- $\bigcup_{i=1}^n A_i$: Evento donde ocurre al menos uno de los eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

En particular $A \cup B$ es el evento donde ocurre sólo A o sólo B o ambas a la vez.

- $\bigcap_{i=1}^n A_i$: Evento donde todos los eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ ocurren a la vez.

2. El número de eventos diferentes que se puede encontrar en un espacio muestral Ω es: $2^{n(\Omega)}$.

En particular, llamemos:

Evento Imposible: $\emptyset$

Evento Seguro: Ω



Definición de Probabilidad

Definición axiomática: Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. La probabilidad de cualquier evento A de Ω , es el número real $P(A)$ que satisface los siguientes axiomas:

P1) $0 \leq P(A), \quad \forall A \subset \Omega$

P2) $P(\Omega) = 1$

P3) Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

De los axiomas de probabilidad resultan los siguientes teoremas:

Teorema 1:

Si $\emptyset$ es el evento imposible, entonces $P(\emptyset) = 0$.

Demostración Como Ω y $\emptyset$ son eventos disjuntos y $\Omega = \Omega \cup \emptyset$,

➡ por el axioma **P3)** se tiene $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \rightarrow P(\emptyset) = 0$

Aplicación 2

Se lanza un dado en forma de octaedro cuyas caras están enumeradas del 1 al 8, y anotamos el número de la cara superior. Sean los eventos:

A : obtener un número primo;

B : obtener un número par.

Se pide:



a) Describir el espacio muestral

b) Calcule: $A \cap B$ y $A \cup B$

c) Calcule: A^C y B^C

d) Si C : obtener un número impar,
calcule: $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup C$,
 $A^C \cap C^C$

Resolución

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

→ $A = \{2, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$

b) $A \cap B = \{2\}$;

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

c) $A^C = \{1, 4, 6, 8\}$; $B^C = \{1, 3, 5, 7\}$

d) $C = \{1, 3, 5, 7\}$; $C^C = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cap C = \{3, 5, 7\}$;

$B \cap C = \emptyset$ → B y C son

**MUTUAMENTE
EXCLUYENTES**

$A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$;

$A^C \cap C^C = \{4, 6, 8\}$

Teorema 2:

Si A^c es el evento complementario de A entonces $P(A) = 1 - P(A^c)$ o $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Demostración

Como A y A^c son eventos disjuntos y $\Omega = A \cup A^c$, por el axioma **P3)** se tiene $P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$

Luego, por el axioma **P2)** se tiene $1 = P(A) + P(A^c)$

Al despejar un sumando se obtiene los resultados deseados.

Teorema 3:

Si A y B son dos eventos de un mismo espacio muestral tal que $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Teorema 4:

(Principio de Inclusión-Exclusión) Si A y B son dos eventos de un mismo espacio muestral entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Es más, para tres eventos A , B y C de un mismo espacio muestral se verifica que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Probabilidad de un evento en un espacio muestral finito

Sea $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, un espacio muestral finito, si A es un evento del espacio equiprobable Ω que consta de k puntos muestrales ($0 \leq k \leq n$) entonces la probabilidad de A es el número:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ veces}} = \frac{k}{n}$$

Observación:

Es decir,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}$$

Se puede verificar que, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ cumple con los 3 axiomas antes mencionado.

Aplicación 3

En una reunión hay 18 hombres y 12 mujeres, de los cuales 20 estudian ciencias y 10 estudian letras. Si 8 personas son mujeres que estudian ciencias. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger 2 personas al azar estas sean mujeres o estudian letras ?

Resolución

De los datos se tiene el siguiente cuadro:

$$P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L)$$

$$P(M \cup L) = \frac{C_2^{12}}{C_2^{30}} + \frac{C_2^{10}}{C_2^{30}} - \frac{C_2^4}{C_2^{30}}$$

$$= \frac{12 \cdot 11}{30 \cdot 29} + \frac{10 \cdot 9}{30 \cdot 29} - \frac{4 \cdot 3}{30 \cdot 29} = \frac{210}{870} = 0,24$$

	H	M	TOTAL
Ciencias (C)	12	8	20
Letras (L)	6	4	10
	18	12	30

Rpta: 0,24

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B de un mismo espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir en forma simultánea, esto implica que $A \cap B = \emptyset$. Es decir, $P(A \cap B) = 0$.

Ejemplo: Se lanza un dado y se registra el número obtenido, también se definen los siguientes dos eventos:

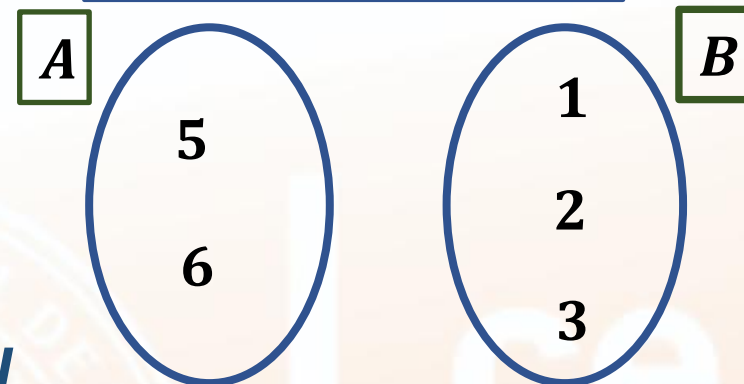
A : Se obtiene un número mayor que 4, $A = \{5, 6\}$.

B : Se obtiene un número menor o igual que 3, $B = \{1, 2, 3\}$.

$A \cap B = \emptyset$.  Los eventos A y B son dos eventos mutuamente excluyentes.

Se cumple que : $P(A \cap B) = 0$.

Luego: $A \cap B = \emptyset$



Es decir, $P(A \cap B) = 0$

Eventos Independientes

Dos eventos A y B de un mismo espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ asociado a un experimento ε se dice que son independientes sí y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esto quiere decir que los eventos A y B no están relacionados, por lo tanto, la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia del otro.

Ejemplo Supongamos que se lanza un dado normal dos veces, definamos los eventos A y B como sigue:

A : El primer resultado muestra un número primo. $P(A) = \frac{18}{36}$

B : El segundo resultado es un número par menor que 6. $P(B) = \frac{12}{36}$

La ocurrencia del evento A no influye en la ocurrencia del evento B .

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{18}{36} \times \frac{12}{36} = \frac{1}{6}$$

Aplicación 4 (Problema 273)

Si A y B son eventos independientes, además $P(A) = 1/5$;
 $P(A \cup B) = 11/35$ entonces el valor de $P(B)$ es

- A) $1/35$ B) $3/14$ C) $1/7$ D) $3/7$ E) $3/5$

Resolución

Sabemos que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como A y B son independientes, la fórmula sería

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{11}{35} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5} \cdot P(B)$$

$$\frac{4}{35} = \frac{4}{5} \cdot P(B) \quad \rightarrow \quad P(B) = \frac{1}{7}$$

Rpta: $1/7$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$, se define la probabilidad condicional del evento A dado que ha ocurrido el evento B , de la siguiente forma:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Aplicación 5

Los estudiantes de una clase, todos peruanos, se han clasificado según el siguiente cuadro:

	MASCULINO	FEMENINO	TOTAL
Lima	9	1	10
Otros departamentos	36	4	40
TOTAL	45	5	50

Al seleccionar un estudiante al azar calcule la probabilidad de que:

1. Sea hombre dado que es de Lima.
2. No sea de Lima dado que es mujer.

Resolución 1. Definimos:

A : Es de Lima.

B : Es hombre.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{9/50}{10/50} = \frac{9}{10}$$

2. Definimos: D : Es mujer.

C : Es de otros departamentos.

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{4/50}{5/50} = \frac{4}{5}$$

Aplicación 6

El 76% de los estudiantes de Ingeniería de Sistemas ha aprobado el curso de Matemática Discreta, el 45% aprobó Estadística. Además, el 46% aprobó solo Matemática Discreta. Si Jorge aprobó Matemática Discreta, ¿cuál es la probabilidad de haber aprobado también Estadística?

- A) 0,23 B) 0,3947 C) 0,41 D) 0,56 E) 0,79

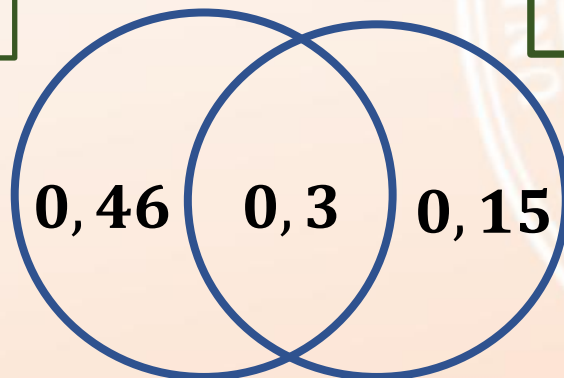
Resolución

Sea MD: Porcentaje de estudiantes que aprobó Matemática Discreta.

E: Porcentaje de estudiantes que aprobó Estadística.

MD (0,76)

E (0,45)



$$P(E|MD) = \frac{P(E \cap MD)}{P(MD)} = \frac{0,3}{0,76}$$

Rpta: 0,3947

Probabilidad de un evento en un espacio muestral infinito numerable

Sea $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$, un espacio muestral infinito numerable, es decir:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{w_i\} \quad \longrightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{w_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{w_i\}) = 1$$

Luego, si A es un evento de Ω , se tiene que:

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\})$$

Aplicación 7

Humberto y Pablo juegan alternativamente sacando una ficha con reposición de una urna que contiene 3 fichas de color azul y 2 fichas blancas. Si gana el primero que obtiene la ficha azul, calcule la probabilidad de que gane Humberto, si él inicia el juego.

Resolución

Sea

A: Sale ficha azul en la extracción i .

B: Sale ficha blanca en la extracción i .

además: $P(A) = \frac{3}{5}$ y $P(B) = \frac{2}{5}$

El espacio muestral que resulta de extraer una ficha hasta obtener una azul es: $\Omega = \{A, BA, BBA, BBBA, \dots\}$

Sea: X: Evento de Ω que resulta ganador Humberto.

$$\rightarrow X = \{A, BBA, BBBBA, \dots\}$$

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \dots\right] \\ &= \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}\right] = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Rpta: 5/7

Probabilidad de un evento en un espacio muestral continuo

Sea A cualquier evento de un espacio muestral continuo Ω , tal que la medida (longitud o área) de A exista, denotado por $m(A)$. Definamos la probabilidad de A como:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Observación:

En el caso continuo la probabilidad de un punto en Ω es cero, por lo tanto, si $P(A) = 0$ no implica que $A = \emptyset$.

Aplicación 9

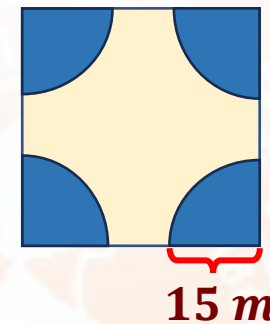
Un centro de esparcimiento tiene un área de forma cuadrangular de 40 m de lado, en cuyos vértices existen piscinas en forma de sector circular de 15 m de radio. Si un paracaidista cae dentro del centro de esparcimiento. ¿Cuál es la probabilidad de que no caiga en el agua?

Resolución

El espacio muestral Ω es el conjunto de puntos de la siguiente región:

$$40 \text{ m} \left\{ \begin{array}{|c|} \hline m(\Omega) \\ \hline \end{array} \right. \Rightarrow m(\Omega) = 40^2 \text{ m}^2 = 1600 \text{ m}^2$$

Sea el evento A el conjunto de puntos que están dentro de las 4 regiones de cada sector circular con un ángulo central de 90° .



$$m(A) = 4 \left(\frac{\pi \times 15^2}{4} \right) \text{ m}^2 = 225\pi \text{ m}^2$$

Nos piden, la probabilidad del complemento de A :

$$P(A^c) = \frac{1600 - 225\pi}{1600} = 0,59$$

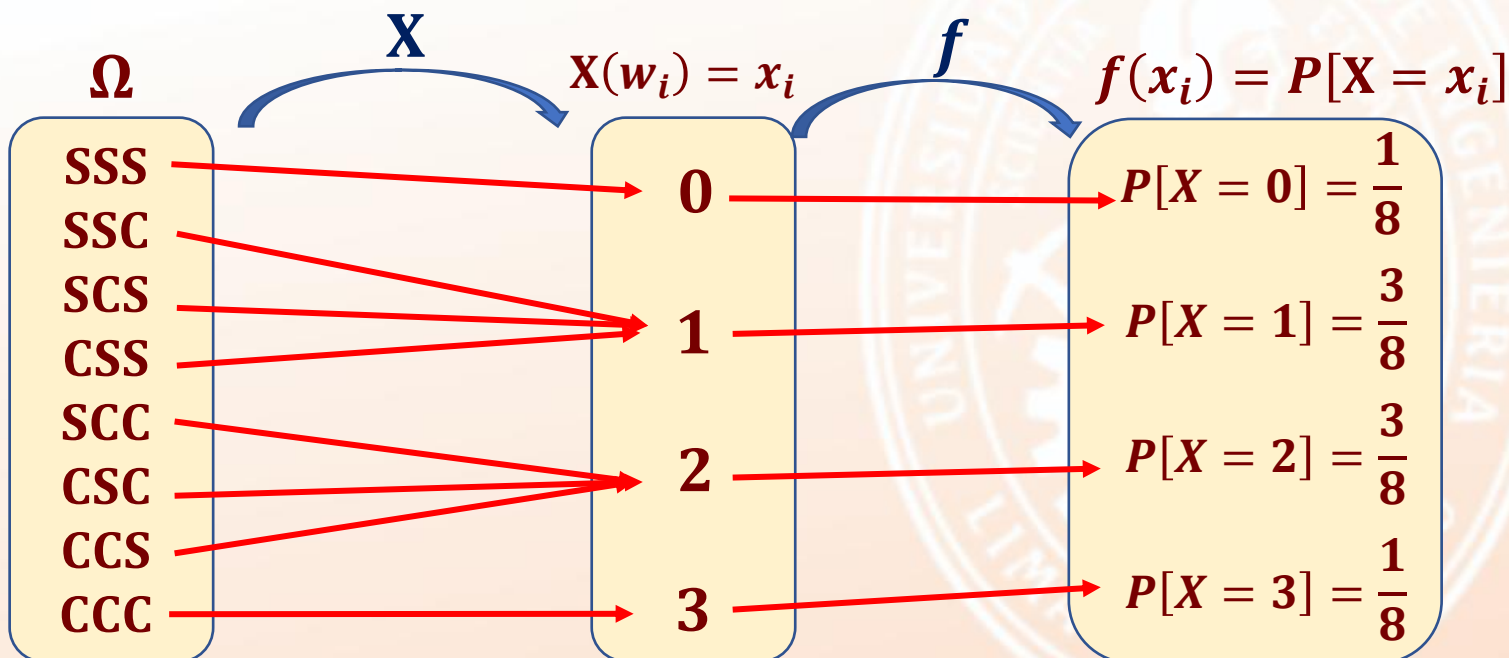
Rpta: 0,59

Variable Aleatoria Discreta

Asocia a cada elemento de un espacio muestral $\Omega = \{w_1; w_2; w_3; \dots\}$ un número real. Es decir: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$w_i \rightarrow X(w_i) = x_i$$

Ejemplo: Se lanza una moneda tres veces y se define la variable aleatoria X : Número de caras obtenidas



Se dice que la variable es aleatoria porque su valor depende del azar, y es discreta si su valor se obtiene por un simple conteo y por lo general estos valores son enteros.

Distribución de Probabilidad Discreta

Función de probabilidad: Es aquella función que asigna a cada valor de la variable aleatoria X su respectiva probabilidad.

Es decir, sea A el conjunto de valores de la variable aleatoria discreta X , entonces

$$f: A \rightarrow [0, 1]$$

$$x_i \rightarrow f(x_i) = P[X = x_i] = f_i$$

Sea la variable aleatoria discreta X con:

$X: x_1, x_2, \dots, x_k$ (Valores de la variable)

$P: p_1, p_2, \dots, p_k$ (respectivas probabilidades)

Observación:

Esta función no es inyectiva y tampoco sobreyectiva

Se debe cumplir:

- $0 \leq p_i \leq 1$; $\forall i = 1, 2, 3, \dots, k$
- $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$

Tabla de distribución de probabilidad discreta

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$P[X = x_i]$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

Esperanza matemática ($E[X]$)

También llamada valor esperado, esperanza matemática, media poblacional o media de una variable aleatoria, es el valor medio de un fenómeno aleatorio.

Si una variable aleatoria X puede tomar los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ con sus respectivas probabilidades $P[x_1], P[x_2], \dots, P[x_n]$, entonces el valor esperado de X está dado por

$$E[X] = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_n \cdot P(x_n)$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$$

Aplicación 10 (Problema 298)

En el siguiente cuadro se tiene a X como una variable aleatoria con su respectiva distribución de probabilidad.

X	2	5	6	8	9
$P[X = x]$	m	$0,3 - m$	$m + 0,05$	$5m$	$7m$

Calcule la esperanza matemática de X .

A) 7,1

B) 7,2

C) 7,5

D) 7,8

E) 8,1

Resolución

Se debe cumplir: $m + 0,3 - m + m + 0,05 + 5m + 7m = 1 \rightarrow m = 0,05$

Luego: $E[X] = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_n \cdot P(x_n)$

$$E[X] = 2 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,25 + 9 \cdot 0,35$$

$$E[X] = 7,1$$

Rpta: 7,1

Aplicación 11

En una feria, Hernán participa en un juego que consiste en lanzar dos dados (uno tiene 2 caras de color verde y 4 caras de color rojo, el otro dado tiene 4 caras de color verde y 2 caras de color negro), donde por cada cara de color verde que aparece Hernán paga 9 soles; por cada cara de color negro y de color rojo que aparece Hernán cobra 3 y 6 soles, respectivamente. ¿Cuánto espera ganar o perder Hernán al participar en este juego?

Resolución

Se pueden presentar los siguientes casos:

Sea x_i : cantidad de dinero que cobra o paga

	VV	VN	RN	RV
x_i	-18	-6	+9	-3
Probabilidad	$\frac{2}{6} \times \frac{4}{6}$	$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6}$	$\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}$	$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$

$$\rightarrow E[X] = -18 \cdot \left(\frac{8}{36}\right) - 6 \cdot \left(\frac{4}{36}\right) + 9 \cdot \left(\frac{8}{36}\right) - 3 \cdot \left(\frac{16}{36}\right) = -4$$

Rpta: Hernán espera perder 4 soles.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 271

Con respecto a un espacio muestral Ω arbitrario, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $2P(A) + P(A^C) = 1,5$ entonces $P(A) = 0,5$.

II. $P(A \cup B) = P(A) \times P(B) - P(A \cap B)$.

III. Si $P(A^C) = P(B^C)$ entonces $A = B$.

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FFV

E) FFF

Resolución

$$I. 2P(A) + 1 - P(A) = 1,5 \rightarrow P(A) = 0,5$$

Verdadero

$$II. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Falso

III. Si el experimento aleatorio es lanzar un dado.

A: Que salga par

B: Que salga impar

$P(A) = P(B)$, pero $A \neq B$ **Falso**

Problema 272

Sea $P(A) = 0,57$; $P(B) = 0,39$ y $P[(A \cup B)^c] = 0,26$. Calcule $P[(A \cap B)^c]$.

A) 0,78

B) 0,72

C) 0,68

D) 0,64

E) 0,59

Resolución

$$P[(A \cup B)^c] = 0.26 \rightarrow P(A \cup B) = 0.74$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,74 = 0,57 + 0,39 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0,22$$

$$\rightarrow P[(A \cap B)^c] = 1 - 0,22 = 0,78$$

Problema 274

En un año bisiesto, la probabilidad de que una determinada persona haya nacido en los dos primeros meses es

A) 10/73

B) 9/61

C) 12/73

D) 10/61

E) 13/61

Resolución

$$P(A) = \frac{31 + 29}{366}$$

$$P(A) = \frac{10}{61}$$

ce
pre
UNI

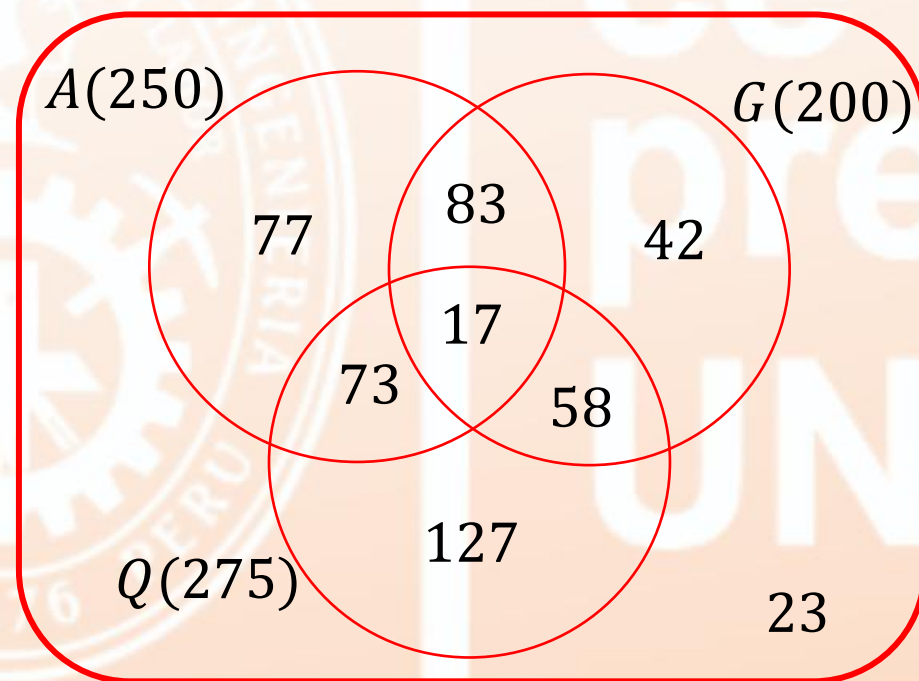
Problema 275

Las preferencias por los cursos de Aritmética (A), Geometría (G) y Química (Q) de una muestra de 500 estudiantes del CepreUni son: 250 prefieren A, 200 prefieren G, 275 prefieren Q; 75 prefieren Q y G; 90 prefieren A y Q y 100 prefieren A y G. Si 23 estudiantes no prefieren ningún curso, calcule la probabilidad de que a uno de los estudiantes de la muestra le guste solo un curso.

- A) 0,375 B) 0,424 C) 0,465 D) 0,492 E) 0,536

Resolución

$$P = \frac{\overbrace{77 + 42 + 127}^{\text{un solo curso}}}{500} = \mathbf{0,492}$$



Problema 276

De una cierta cantidad de estudiantes, incluidas Silvia y Jazmín, que pertenecen a un aula del CepreUni, se deben seleccionar a 4 estudiantes para formar un grupo de estudio, y la probabilidad de que Silvia y Jazmín estén siempre en el grupo es de $\frac{2}{35}$. Si se requiere formar otro grupo de 12 estudiantes de la cantidad inicial, entonces la probabilidad de que Silvia este en dicho grupo es

- A) 0,35 B) 0,54 C) 0,625 D) 0,72 E) 0,8

Resolución

$$\frac{2}{35} = P(\text{Silvia y Jazmín en el grupo})$$

$$\frac{2}{35} = \frac{C_2^{n-2}}{C_4^n} = \frac{12}{n(n-1)} \rightarrow n = 15$$

$$P(\text{Silvia en el grupo}) = \frac{C_{11}^{14}}{C_{12}^{15}}$$

$$P(A) = \frac{C_{11}^{14}}{C_{12}^{15}} = \mathbf{0,8}$$

Problema 277

Julián tiene 8 bolillas en una urna, enumeradas del 1 al 8, pero en un descuido de Julián, su hermano Pedro extrae dos bolillas de dicha urna. Calcule la probabilidad de que la suma de los resultados de las dos bolillas extraídas por Pedro sea 8.

A) 3/28**B) 1/7****C) 3/5****D) 9/28****E) 1/2****Resolución** $\{1;7\}, \{2;6\}, \{3;5\}$

$$P(\text{Suma de bolas es } 8) = \frac{3}{C_2^8} = \frac{3}{28}$$

Problema 278

Rodrigo tiene en una caja 6 libros de Química y 7 de Aritmética, él desea obsequiar algunos libros a su hermano Cristopher, para lo cual le propone un juego, se lleva todos los libros que extrae de uno en uno sin reposición cuando en la quinta extracción obtiene el primer libro de Aritmética. Calcule la probabilidad de que Cristopher gane el juego.

- A) $2/143$ B) $5/264$ C) $3/323$ D) $7/429$ E) $7/572$

Resolución

Obtener un libro de aritmética en la quinta extracción :

$$\begin{array}{c} \text{Química} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 6 \times 5 \times 4 \times 3 \end{array} \times 7$$

Extraer cinco libros: $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$

$$P(A) = \frac{7}{429}$$

Problema 279

Se elige al azar un número entero positivo menor que 175, calcule la probabilidad de que dicho número sea primo sabiendo que es menor a 40.

A) 1/11

B) 3/11

C) 8/35

D) 4/13

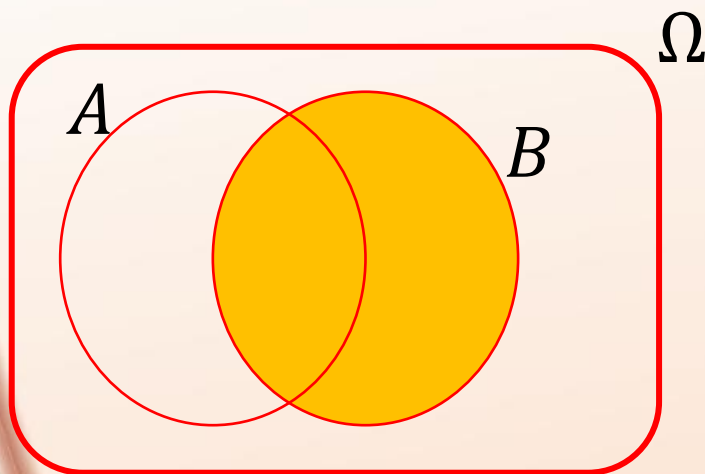
E) 6/13

Resolución

Ω : *numero natural menor a 175*

A : *extraer un numero y que se primo*

B : *extraer un numero y que sea menor a 40*



$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{12}{39} = \frac{4}{13}$$

Problema 280

Belinda tiene dos dados, uno de color blanco y el otro azul. Calcule la probabilidad de obtener una suma par de los resultados en las caras superiores cuando Belinda lanza dichos dados, donde el resultado del dado blanco es mayor que el resultado del dado azul.

A) 5/18

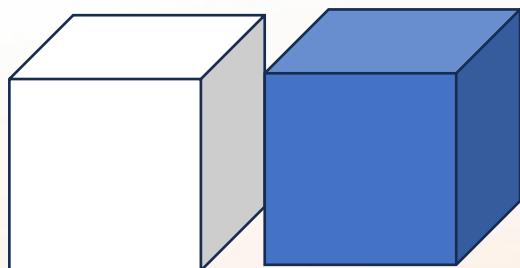
B) 1/6

C) 1/3

D) 7/36

E) 1/4

Resolución



Resultados favorables

(6, 2); (6, 4)

(5, 1); (5, 3)

(4, 2); (3, 1)

$$n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$$

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Problema 281

El SEDEMHI es un nuevo organismo técnico departamental que brinda información sobre el pronóstico del tiempo en una cierta ciudad, en la cual llueve el 40% de los días al año. En base a los instrumentos de medición meteorológica el 10% de las veces que llueve el SEDEMHI predice que habrá día no lluvioso y el 30% de las veces que no llueve el SEDEMHI predice que habrá día lluvioso. Si el SEDEMHI predice lluvia para mañana, calcule la probabilidad de que llueva mañana.

A) 0,39

B) 0,48

C) 0,54

D) 0,67

E) 0,71

Resolución



$$P = \frac{(0,4)(0,9)}{(0,4)(0,9) + (0,6)(0,3)}$$

$$P = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} = \mathbf{0,67}$$

Problema 282

En el supermercado VILPLAZA, la probabilidad de esperar 6 minutos o más en la caja registradora es de 0,3. Un cierto día los esposos Gutiérrez deciden comprar por separado y los dos van a pagar llegando al mismo tiempo en dos cajas registradoras distintas. Calcule la probabilidad de que el esposo o la esposa o ambos esperen 6 minutos o más.

A) 0,36

B) 0,51

C) 0,54

D) 0,64

E) 0,68

Resolución



$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = (0,3) \times (0,3) = 0,09$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \mathbf{0,51}$$

Problema 283

Ismael tiene un dado cargado, con doble posibilidad de obtener un número impar en la cara superior al lanzar el dado. Calcule la probabilidad de que al lanzar dicho dado se obtenga en la cara superior un valor impar o mayor que 4.

A) 2/9**B) 1/3****C) 4/9****D) 5/9****E) 7/9****Resolución**

$$P(\text{impar}) = \frac{2}{3} \quad \rightarrow P(X = 1) = P(X = 3) = P(X = 5) = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{par}) = \frac{1}{3} \quad \rightarrow P(X = 2) = P(X = 4) = P(X = 6) = \frac{1}{9}$$

$$A = \{1, 3, 5, 6\}$$

$$P(A) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Problema 284

Sea la función de probabilidad de una variable aleatoria X . Si $P(x) = \frac{a}{x^2 - 4}$ donde $x \in \{3; 4; 5; 6; \dots\}$. Calcule $P[X < 6]$.

A) 468/725 B) 514/775 C) 556/875 D) 569/884 E) 623/915

Resolución

$$\sum_{x=3}^{\infty} \frac{a}{x^2 - 4} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{4} \sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = 1$$

$$\rightarrow \frac{a}{4} \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{7}} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{9}} + \dots \right) = 1$$

$$\rightarrow \frac{a}{4} \left(\frac{25}{12} \right) = 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{48}{25}$$

$$P[X < 6] = P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5]$$

$$P[X < 6] = a \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{21} \right) = \frac{556}{875}$$

Problema 286

En un coloquio de investigación en la UNI participan 7 ingenieros civiles y 4 ingenieros industriales, para realizar la ponencia se requiere solo un comité formado por 6 ingenieros. Calcule la probabilidad de que el comité este formado por a lo más tres ingenieros civiles.

A) 17/462

B) 5/66

C) 44/462

D) 23/66

E) 161/264

Resolución:

$$\text{Casos a favor: } C_2^7 \times C_4^4 + C_3^7 \times C_3^4 = \frac{7!}{2! \times 5!} + \frac{7!}{3! \times 4!} \frac{4!}{3! \times 1!} = 161$$

$$\text{Casos en total: } C_6^{11} = \frac{11!}{6! \times 5!}$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{161 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{23}{66}$$

Problema 287

Calcule la probabilidad de que al ordenar al azar las letras de la palabra **INGENIERIA**, las letras **I** estén alternadas con las dos letras **N**.

A) $1/420$

B) $1/140$

C) $1/210$

D) $2/35$

E) $2/105$

Resolución:

I	N	I	N	I	G	E	E	R	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Casos a favor: $PR_2^6 = 3 \times 4 \times 5 \times 6$

Casos en total: $PR_{2;3;2}^{10} = 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

$$\rightarrow P(A) = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10} = \frac{1}{420}$$

Problema 288

Sandy realiza una clasificación a sus compañeros del aula con respecto a la preferencia de algunos cursos de Matemática que estudia en CepreUni, de la siguiente manera

	Varones	Mujeres
Solo Álgebra	6	2
Solo Aritmética	10	5
Solo Geometría	4	3
Solo Química	8	4

Si seleccionamos a uno de los compañeros de Sandy, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y no prefiera el curso de Aritmética?

A) $1/7$

B) $3/14$

C) $2/7$

D) $5/14$

E) $1/2$

Resolución:

9 mujeres no prefieren aritmética

Son 42 compañeros de Sandy

$$\rightarrow P(A) = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$$

Problema 289

En un total de 15 personas, 10 son hombres y 5 son mujeres, van a ser divididos al azar en cinco grupos con 3 personas cada uno. Calcule la probabilidad que en cada uno de los cinco grupos siempre haya una mujer.

A) 0,05

B) 0,06

C) 0,07

D) 0,08

E) 0,09

Resolución:

$$\text{Casos a favor: } C_2^{10} C_1^5 \times C_2^8 C_1^4 \times C_2^6 C_1^3 \times C_2^4 C_1^2 \times C_2^2 C_1^1 = \frac{10! \times 5!}{(2!)^5}$$

$$\text{Casos en total: } C_3^{15} \times C_3^{12} \times C_3^9 \times C_3^6 \times C_3^3 = \frac{15!}{(3!)^5}$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{\frac{10! \times 5!}{(2!)^5}}{\frac{15!}{(3!)^5}} = \frac{81}{1001} \cong 0,08$$

Problema 290

Shayla decide vender los 10 relojes para mujer del mismo tipo que compró en una promoción por internet de una tienda comercial, de los cuales 6 están en perfectas condiciones y los otros tienen cierto defecto en su estructura interna. Si su amiga Belinda decide comprar 5 relojes escogiendo de uno en uno sin reposición, calcule la probabilidad de que 3 de esos relojes estén en perfectas condiciones.

A) 1/3

B) 10/21

C) 2/3

D) 5/7

E) 16/21

Resolución:

$$\text{Casos a favor: } C_3^6 \times C_2^4 = 120$$

$$\text{Casos en total: } C_5^{10} = \frac{10!}{(5!)^2} = 4 \times 7 \times 9$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{120}{4 \times 7 \times 9} = \frac{10}{21}$$

Problema 291

Cinco fichas marcadas con los números 1; 2; 3; 4 y 5 se colocan en un tablero aleatoriamente en fila, en posiciones también marcadas con los números 1; 2; 3; 4 y 5. Calcule la probabilidad de que la ficha 1 no esté en la primera posición y la ficha 2 no esté en la segunda posición.

A) 0,45

B) 0,54

C) 0,56

D) 0,60

E) 0,65

Resolución

1	2	3	4	5

↑ no
1

↑ no
2

$$A: \text{ficha 1 en 1} \rightarrow P(A) = \frac{4!}{5!}$$

$$B: \text{ficha 2 en 2} \rightarrow P(B) = \frac{4!}{5!}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{42}{120} = 0,35$$

$$P(A \cup B)^c = 0,65$$

Rpta. E

Problema 292

Micaela acaba de culminar la carrera de ingeniería civil en la UNI, y para no perder tiempo, decide solicitar empleo a dos compañías constructoras HVC SAC y MCQ SAC. Se estima que la probabilidad de ser contratada por HVC SAC es 0,75 y por MCQ SAC es 0,64; mientras que la probabilidad de que por lo menos una de sus solicitudes sea rechazada es 0,55. Calcule la probabilidad de que al menos una de las compañías constructoras acepte la solicitud de empleo enviada por Micaela.

A) 0,82

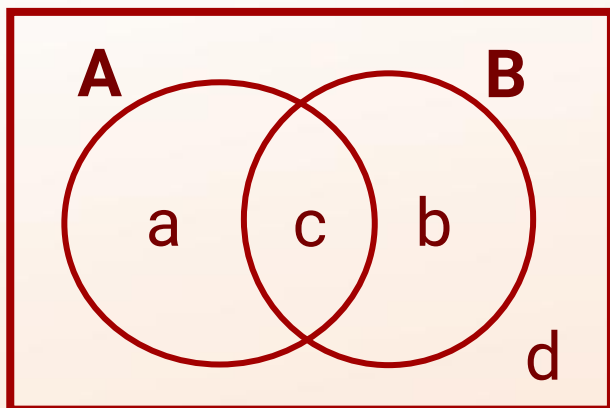
B) 0,84

C) 0,9

D) 0,92

E) 0,94

Resolución



$$a + c = 0,75$$

$$b + c = 0,64$$

$$a + b + d = 0,55$$

$$a + b + c + d = 1$$

$$P(\text{al menos una}) = 0,94$$


Rpta. E

Problema 293

Si elegimos al azar un número de siete cifras del sistema decimal cuya suma de cifras es 61. Calcule la probabilidad de que el número elegido sea par.

A) $3/14$ **B) $1/4$** **C) $13/28$** **D) $3/4$** **E) $11/14$** **Resolución**

$$\Sigma (7 \text{ cifras}) = 61$$

$$9+9+9+9+9+9+7 = 61$$

$$9+9+9+9+9+8+8 = 61$$

$$\# \text{casos posibles} = 7 + 21$$

$$\# \text{casos favorables} = 6$$


$$P = \frac{6}{28}$$

Rpta. A

Problema 294

Una moneda adulterada al ser lanzada tiene una probabilidad de 0,75 de que salga sello. Si la moneda se lanza cuatro veces, calcule la probabilidad de obtener solo caras o una vez sello o dos veces sello.

A) 0,18**B) 0,24****C) 0,26****D) 0,32****E) 0,35****Resolución**

$$P(\text{solo caras}) = (0,25)^4 = a$$

$$P(\text{una vez sello}) = C_1^4 \times (0,75) \times (0,25)^3 = b$$

$$P(2 \text{ veces sellos}) = C_2^4 \times (0,75)^2 \times (0,25)^2 = c$$

$$\therefore a + b + c = 0,26171875$$

Rpta. C

Problema 295

En una reunión familiar se encuentran ocho parejas de casados; si se escogen cuatro personas al azar, calcule la probabilidad de que sean dos parejas de casados.

A) $1/143$ B) $7/143$ C) $5/13$ D) $1/65$ E) $9/13$

Resolución:

Se pide la probabilidad de al escoger 4 personas estas sean 2 parejas de casados

$$\frac{C_2^8}{C_4^{16}} = \frac{\frac{8!}{2!.6!}}{\frac{16!}{4!.12!}} = \frac{1}{65}$$

Problema 296

La probabilidad de que un conjunto habitacional en un cierto distrito termine a tiempo es $\frac{17}{20}$, la probabilidad de que no haya huelga es $\frac{3}{4}$, la probabilidad de que la construcción termine a tiempo dado que no hubo huelga es $\frac{14}{15}$, la probabilidad de que haya huelga y no se termine a tiempo la construcción es $\frac{1}{10}$. Calcule las siguientes probabilidades:

Que la construcción termine a tiempo y no haya huelga.

Que la construcción no termine a tiempo dado que hubo huelga.

Dé como respuesta la diferencia positiva de dichas probabilidades.

A) 0,15

B) 0,30

C) 0,36

D) 0,40

E) 0,44

Resolución:

A: termine a tiempo

B: Que haya huelga

$$P(A) = 17/20, \quad P(B^c) = 3/4$$

$$P(A/B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{14}{15}$$

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{10}$$

$$a) \quad P(A \cap B^c) = \frac{14}{15} P(B^c) = \frac{7}{10}$$

$$b) \quad P(A^c/B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{1/4} = \frac{2}{5}$$

Se pide:

a) - b):

$$\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = 0,30$$

ce
pre
UNI

Problema 297

El número de hijos por familia en una determinada ciudad es una variable aleatoria H , cuya función de probabilidad es $f(x) = P[H = x] = \frac{K \cdot x}{5}$, $x = 1; 2; 3; 4; 5$. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 3 hijos dado que tiene al menos dos hijos?

A) 0,200

B) 0,214

C) 0,267

D) 0,333

E) 0,357

Resolución:

A: Que la familia tenga 3 hijos

B: Que la familia tenga al menos 2 hijos

$$P[H = 1] = \frac{K}{5} \quad P[H = 3] = \frac{3K}{5} \quad P[H = 5] = k$$

$$P[H = 2] = \frac{2K}{5} \quad P[H = 4] = \frac{4K}{5}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{3k}{5}}{\frac{2k}{5} + \frac{3k}{5} + \frac{4k}{5} + \frac{5k}{5}}$$

$$P(A/B) = 0,214$$

PROBLEMA 299

David tiene 50 esferas contenidas en una urna, numeradas del 1 al 50, su amigo Fredy le propone un juego: “tu extraes 3 esferas a la vez y multiplicas los resultados obtenidos, si sale impar ganas 98 soles, pero si sale par me pagas 98 soles”. Determine la esperanza de ganancia de David en este juego.

A) 15

B) 5

C) -75

D) -60

E) -45

Resolución

Del 1 al 50, se debe extraer 3 esferas: $\binom{50}{3} = 19\ 600$

El producto de los resultados sale impar: $\binom{25}{3} = 2\ 300$ → Gana S/ 98

El producto de los resultados sale par: 17 300 → Paga S/ 98

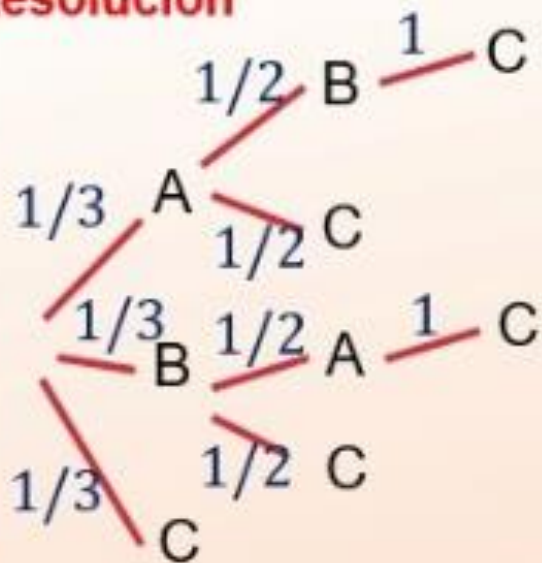
$$E(x) = 98 \left(\frac{2300}{19600} \right) - 98 \left(\frac{17300}{19600} \right) = -75$$

PROBLEMA 300

En un experimento se quiere determinar la distancia que recorre un hámster para salir de un laberinto. En el punto de partida del laberinto hay tres orificios iguales A, B y C, si el hámster elige A, vuelve al punto de partida después de recorrer 4 metros, si elige B recorre 5 metros y vuelve al punto de partida, si elige C sale del laberinto después de recorrer 6 metros. Calcule la distancia esperada en metros que recorre el hámster antes de salir, si siempre elige un orificio distinto de los seleccionados anteriormente.

- A) 7,5 B) 7,8 C) 8 D) 8,3 E) 8,5

Resolución



$$E = 15 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 15 \times \frac{1}{6} + 11 \times \frac{11}{6} + 6 \times \frac{1}{3}$$

$$E = 10,5$$